ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA – CORSO M

LAUREA Ing. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 22 Gennaio 2018 – Traccia II

COGNOME\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ NOME\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ MATRICOLA:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Q1) Dare la definizione di applicazione lineare, di immagine e di nucleo.

Q2) Dimostrare la condizione di perpendicolarità fra retta e piano nello spazio S3, nel quale è fissato un riferimento cartesiano *RC*(O,x,y,z).

Q3) Discutere il sistema

$$\left\{\begin{array}{c}x+ky+z=k-1\\x+y+2kz=1-k\end{array}\right.$$

al variare di k in R e calcolare le soluzioni nel caso k = 1.

Q4) Data la funzione $f:R^{3}⟶R^{2} \ni ' ∀(x,y,z)\in R^{3}:f\left(x,y,z\right)=\left(x+z,y+z\right), $

1. dimostrare che f è lineare;
2. calcolare una base e la dimensione di Im(f);
3. calcolare una base e la dimensione di Ker(f).

Q5) Data la conica di equazione :

1. classificare la conica (specie e genere);
2. calcolare la sua equazione canonica.

Q6) Nel riferimento cartesiano ortonormale *RC*(O,i,j,k) sono dati il punto P(1, -1, 1), la retta r di equazioni $\left\{\begin{array}{c}x+y-1=0\\x+z=0\end{array}\right.$ e il piano  di equazione x +2 y – z = 0.

1. Calcolare le equazioni della retta s passante per P, parallela alla retta r.
2. Calcolare l’equazione del piano ’ passante per P e parallelo al piano .
3. Calcolare la distanza fra i piani  e ’.

FOGLIO DELLE RISPOSTE

(Q1) (Sul foglio)

(Q2) (Sul foglio)

(Q3)

* Sistema determinato: //
* Sistema indeterminato: $∀k\in R$
* Sistema impossibile: //
* Soluzione nel caso k = 1: $\left\{\begin{array}{c}x=-y\\z=0\end{array}\right., ∀y\in R. $

(Q4)

1. (Dimostrazione sul foglio)
2. $B\_{Im(f)}=\left\{u\_{1}^{'}\left(1,0\right),u\_{2}^{'}\left(0,1\right)\right\}$ , dim Im(f) = 2;
3. Bker(f) = $B\_{Ker(f)}=\left\{u\_{1}=\left(-1,-1,1\right)\right\}$ ; dim Ker(f) = 1.

(Q5)

1. Specie: IPERBOLE, Genere: NON DEGENERE
2. Equazione canonica: $\frac{x^{2}}{\frac{11}{18}}-\frac{y^{2}}{\frac{11}{12}}=-1$ .

(Q6)

1. Equazioni di s: $\left\{\begin{array}{c}x+y=0\\x+z-2=0\end{array}\right.$
2. Equazione di ’: $x+2y-z+2=0.$
3. $d\left(π,π^{'}\right)=\frac{2}{\sqrt{6}}.$

Soluzione

(Q1) Siano V e V’ due spazi vettoriali su K e sia $f:V⟶V'$.

1. Si dice che f è un’applicazione lineare se $\left\{\begin{array}{c}1) ∀u,v\in V:f\left(u+v\right)=f\left(u\right)+f\left(v\right),\\2) ∀k\in K e ∀u\in V:f\left(k∙u\right)=k∙f\left(u\right).\end{array}\right.$
2. $Im\left(f\right)=\left\{v'\in V'\left|∃v\in V\ni ^{'}v^{'}=f(v)\right.\right\}$
3. $Ker\left(f\right)=\left\{v\in V\left|f\left(v\right)=0\right.\right\}$.

(Q2) Sia r una retta di vettore direttore $\vec{v}\_{r}=\left(l,m,n\right)$ e sia $α un piano di equazione $

ax + by + cz + d = 0.

Indicato con $\vec{n}=(a,b,c)$ un vettore perpendicolare al piano $α$, si ha:

$$r⊥α⟺\vec{v}\_{r}∥\vec{n}⟺\frac{a}{l}=\frac{b}{m}=\frac{c}{n}.$$

(Q3) E’ dato il sistema $\left\{\begin{array}{c}x+ky+z=k-1\\x+y+2kz=1-k\end{array}\right.$.

Le matrici associate al sistema sono:

$$A=\left(\begin{matrix}1&k&1\\1&1&2k\end{matrix}\right) e A^{'}=\left(\begin{matrix}1&+k&1 \\1&1&2k \end{matrix}\begin{matrix}k-1\\1-k\end{matrix}\right)$$

Considerata la matrice A, si ha:

$a\_{12,12}=\left|\begin{matrix}1&k\\1&1\end{matrix}\right|=1-k=0 ⟹k=1$.

Discussione

1. $∀k\ne 1:rang\left(A\right)=2=rang\left(A^{'}\right)⟹il sistema è compatibile e ammette \infty ^{1} soluzioni.$
2. Per k = 1, il sistema diventa $\left\{\begin{array}{c}x+y+z=0\\x+y+2z=0\end{array}\right.$ e le matrici associate sono:

$$A=\left(\begin{matrix}1&1&1\\1&1&2\end{matrix}\right) e A^{'}=\left(\begin{matrix}1&1&1 \\1&1&2 \end{matrix}\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right)$$

Poiché $a\_{12,13}=\left|\begin{matrix}1&1\\1&2\end{matrix}\right|=2-1=1\ne 0⟹rang\left(A\right)=2=rang\left(A^{'}\right)⟹$ il sistema è compatibile e ammette $\infty ^{1} soluzioni.$

Dunque, $∀k\in R$ il sistema è indeterminato: per nessun valore di k è determinato o impossibile.

Calcoliamo le soluzioni del sistema per k = 1.

Per k = 1, osservato che è $a\_{12,13}=1\ne 0,$ si ha:

$$\left\{\begin{array}{c}x+y+z=0\\x+y+2z=0\end{array}\right.⟹\left\{\begin{array}{c}x+z=-y\\x+2z=-y\end{array}\right.$$

$$∆=1;$$

$$∆\_{x}=\left|\begin{matrix}-y&1\\-y&2\end{matrix}\right|=-2y+y=-y;$$

$$∆\_{z}=\left|\begin{matrix}1&-y\\1&-y\end{matrix}\right|=-y+y=0.$$

Quindi, le infinite soluzioni del sistema sono: $\left\{\begin{array}{c}x=\frac{∆\_{x}}{∆}=-y\\z=0\end{array}\right., ∀y\in R. $

(Q4) E’ data la funzione $f:R^{3}⟶R^{2} \ni ^{'}∀\left(x,y,z\right)\in R^{3}:f\left(x,y,z\right)=\left(x+z,y+z\right). $

1. Dimostriamo che f è un’applicazione lineare.
2. $∀u\_{1},u\_{2}\in R^{3}:f\left(u\_{1}+u\_{2}\right)=f\left(\left(x\_{1},y\_{1},z\_{1}\right)+\left(x\_{2},y\_{2},z\_{2}\right)\right)=f\left(x\_{1}+x\_{2},y\_{1}+y\_{2},z\_{1}+z\_{2}\right)=$

$$=(x\_{1}+x\_{2}+z\_{1}+z\_{2},y\_{1}+y\_{2}+z\_{1}+z\_{2}=\left(\left(x\_{1}+z\_{1}\right)+\left(x\_{2}+z\_{2}\right),\left(y\_{1}+z\_{1}\right)+\left(y\_{2}+z\_{2}\right)\right)=$$

 = ($x\_{1}+z\_{1}, y\_{1}+z\_{1})+\left(x\_{2}+z\_{2},y\_{2}+z\_{2}\right)=f\left(x\_{1},y\_{1},z\_{1}\right)+f\left(x\_{2},y\_{2},z\_{2}\right)=f\left(u\_{1}\right)+f\left(u\_{2}\right).$

1. $∀k\in R,∀u\in R^{3}:f\left(ku\right)=f(k\left(x,y,z\right)=f\left(kx,ky,kz\right)=\left(kx+kz,ky+kz\right)=$

$$=\left(k\left(x+z\right),k\left(y+z\right)\right)=k\left(x+y,y+z\right)=kf\left(x,y,z\right)=kf\left(u\right).$$

1. $∀u^{'}\in Im\left(f\right):u^{'}=f\left(u\right)=f\left(x,y,z\right)=\left(x+z,y+z\right)=\left(x,0\right)+\left(0,y\right)+\left(z,z\right)=$

$=x\left(1,0\right)+y\left(0,1\right)+z\left(1,1\right)⟹Im\left(f\right)=L(u\_{1}^{'}\left(1,0\right),u\_{2}^{'}\left(0,1\right),u\_{3}^{'}\left(1,1\right))$.

$Poichè u\_{3}^{'}\left(1,1\right)=u\_{1}^{'}\left(1,0\right)+u\_{2}^{'}\left(0,1\right)⟹(u\_{1}^{'}\left(1,0\right),u\_{2}^{'}\left(0,1\right),u\_{3}^{'}\left(1,1\right))$ sono L.D.

Una base è $B\_{Im(f)}=\left\{u\_{1}^{'}\left(1,0\right),u\_{2}^{'}\left(0,1\right)\right\}$ e dim $Im\left(f\right)= $2.

1. $∀u\in Ker\left(f\right):f\left(u\right)=0⟹\left(x+z,y+z\right)=(0,0)⟹\left\{\begin{array}{c}x+z=0\\y+z=0\end{array}⟹\left\{\begin{array}{c}x=-z\\y=-z\end{array}⟹\right.\right.$

$$⟹∀ u\in Ker\left(f\right):u=\left(-z,-z,z\right)=z\left(-1,-1,1\right)⟹Ker\left(f\right)=L\left(u\_{1}=\left(-1,-1,1\right)\right).$$

Una base di Ker(f) è $B\_{Ker(f)}=\left\{u\_{1}=\left(-1,-1,1\right)\right\}$ e dim Ker(f) = 1.

(Q5)

(a) E’ data la conica di equazione 

Le matrici associate alla conica sono:

$$A=\left(\begin{matrix}2&-2&1\\-2&-1&-3\\1&-3&1\end{matrix}\right) e A^{00}=\left(\begin{matrix}2&-2\\-2&-1\end{matrix}\right).$$

Poiché $I\_{2}=\left|A^{00}\right|=-2-4=-6<0⟹$ la conica è un’iperbole e poiché

$$I\_{3}=\left|A\right|=\left|\begin{matrix}2&-2&1\\-2&-1&-3\\1&-3&1\end{matrix}\right|=-2+6+6—1+18+4=10-21=-11\ne 0, $$

la conica è non degenere.

1. Calcoliamo gli autovalori di A00.

$$\left|A^{00}-λI\right|=0⟹\left|\begin{matrix}2-λ&-2\\-2&-1-λ\end{matrix}\right|=0⟹\left(2-λ\right)\left(-1-λ\right)-4=0⟹λ^{2}-λ-6=0.$$

$$∆=25, λ\_{1/2}=\frac{1\pm 5}{2}=\left\{\begin{array}{c}-2\\3\end{array}.\right.$$

L’equazione canonica dell’iperbole è

$$λ\_{1}x^{2}+λ\_{2}y^{2}+t=0⟺3x^{2}-2y^{2}+t=0$$

la cui matrice associata è

$$B=\left(\begin{matrix}3&0&0\\0&-2&0\\0&0&t\end{matrix}\right).$$

Imponiamo che $\left|B\right|=\left|A\right|⟹-6t=-11⟹t=\frac{11}{6}.$

Quindi, l’equazione canonica dell’iperbole è

$$3x^{2}-2y^{2}+\frac{11}{6}=0⟺\frac{x^{2}}{\frac{11}{18}}-\frac{y^{2}}{\frac{11}{12}}+1=0⟺\frac{x^{2}}{\frac{11}{18}}-\frac{y^{2}}{\frac{11}{12}}=-1.$$

(Q6)

1. La retta r:$\left\{\begin{array}{c}x+y-1=0\\x+z=0\end{array}\right.$ , la cui matrice dei coefficienti è $\left(\begin{matrix}1&1&0\\1&0&1\end{matrix}\right)$, ha parametri direttori

$$l=\left|\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\right|=1,m=-\left|\begin{matrix}1&0\\1&1\end{matrix}\right|=-1, n=\left|\begin{matrix}1&1\\1&0\end{matrix}\right|=-1.$$

Quindi, la retta s passante per P(1,-1,1) e parallela alla retta r ha equazioni

$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{-1}⟺\left\{\begin{array}{c}x+y=0\\x+z-2=0\end{array}\right.$.

1. Il piano $π:x +2 y – z = 0$ ha parametri di giacitura $a=1,b=2,c=-1.$

Quindi, il piano $π'$ passante per P(1,-1,1) e parallelo al piano $π$, ha equazione

$$1\left(x-1\right)+2\left(y+1\right)-1\left(z-1\right)=0⟺x+2y-z+2=0.$$

1. La distanza fra i due piani è

$$d\left(π,π^{'}\right)=\frac{\left|d-d'\right|}{\sqrt{a^{2}+b^{2}+c^{2}}}=\frac{\left|0-2\right|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{2}{\sqrt{6}}.$$